| | | |
|---|---|---|
| جامعة البعث | امتحان مقرر الطبولوجيا ( 1 ) | اسم الطالب : [redacted] |
| كلية العلوم | السنة الثانية - رياضيات | العلامة : 100 |
| قسم الرياضيات | الفصل الأول للعام الدراسي 2017/2016 | المدة : ساعة ونصف |

السؤال الأول ( 37 علامة ) :

نأخذ في الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ المجموعة $A = ]0,1] \cup \{2\}$

أ – أوجد $\mathring{A}$ ; $\bar{A}$ ; $A'$ ; $Fr(A)$ ; $Ext(A)$ .

ب – 1) هل المجموعة $A$ متراصة ولماذا ؟

2) هل المجموعة $A$ متصلة ولماذا ؟

3) هل المجموعة $A$ كثيفة ولماذا ؟

4) هل الفضاء الجزئي $A$ تام ولماذا ؟

5) هل المجموعة $A$ هي جوار النقطة $x = 2$ ولماذا ؟

السؤال الثاني ( 30 علامة ) :

أ – عرّف الآتي : 1) نقطة التراكم لمجموعة 2) الفضاء المتري المتراص 3) المجموعة المحدودة في فضاء متري .

ب – أعط تعريفين متكافئين لتقارب المتتالية $(x_n)$ من العنصر $x$ في الفضاء المتري $(X, d)$ .

ج – أثبت أن مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ هي مجموعة كثيفة في الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ ( أي أثبت أن $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ) .

السؤال الثالث ( 33 علامة ) :

أ – اذكر الخواص الأساسية للمجموعات المفتوحة في أي فضاء متري .

ب – ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً من الفضاء المتري $X$ إلى الفضاء المتري $Y$ . إذا كان $X$ مترابطاً و $f$ مستمراً فأثبت أن المجموعة $f(X)$ مترابطة في $Y$ .

حمص في 15 / 2 / 2017

أ . د . طالب ع...

سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا (1)
السنة الثانية - رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول (٢٧ علامة):

أ- $A' = [0,1]$ ; $\bar{A} = [0,1]\cup\{2\}$ ; $A^{\circ} = ]0,1[$

$Fr(A) = \bar{A}\setminus A^{\circ} = \{0,1,2\}$ ; $Ext(A) = \mathbb{R}\setminus\bar{A} = ]-\infty,0[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

ب- 1) A غير متراصة لأنها غير مغلقة 4

2) A غير مترابطة لأنها اجتماع مجموعتين مترابطتين $\{2\}$ و $[0,1]$ غير المتقاطعتين (أو بطريقة أخرى حسب التعريف). 5

3) A ليست كثيفة لأن $\bar{A} \neq \mathbb{R}$ 4

4) الفضاء الجزئي A غير تام لأن A غير مغلقة 4

5) A ليست جواراً للنقطة $x=2$ لأنها لا تحوي مجالاً مفتوحاً مركزه $x=2$. 5

السؤال الثاني (٢٠ علامة):

أ- التعاريف: 1) نقول عن نقطة x إنها نقطة تراكم للمجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A بنقاط مختلفة عن x. 4

2) الفضاء المتراص هو الفضاء الذي تحوي أي تغطية مفتوحة له على تغطية جزئية منتهية. 4

3) المجموعة المحدودة في الفضاء المتري هي التي يمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها عدد منته. 4

ب- نقول عن المتتالية $(x_n)$ إنها تتقارب من العنصر x في الفضاء المتري $(X,d)$ إذا كان 4

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 : d(x_n,x)<\varepsilon, \forall n\geq n_0$

أو (التعاريف المكافئة): 4

إذا كان أي جوار للنقطة x يحوي جميع حدود المتتالية اعتباراً من حد ما.

ج- إذا أخذنا أي جوار لأي نقطة x من $\mathbb{R}$ فإن هذا الجوار يحوي مجالاً مفتوحاً مركزه x ،

وبما أن أي مجال مفتوح يحتوي على ما لا نهاية من الأعداد العادية، فهذا يعني
أن أي جوار للنقطة x يتقاطع مع $\mathbb{Q}$، أي أن x نقطة لاصقة بـ $\mathbb{Q}$. وبما أن 10
x كيفية من $\mathbb{R}$ إذن $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.

السؤال الثالث (٢٢ علامة):

أ- 1) اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة 9
2) تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة
3) المجموعة الكلية X والخالية $\Phi$ مجموعتان مفتوحتان

ب- إثبات المبرهنة:
نبرهن بطريقة نقض الفرض، حيث نفرض أن $f(X)$ غير مترابطة وبالتالي
يوجد تقسيم بالمجموعتين A و B المفتوحتين في الفضاء Y واللتين تحققان: 24
$A \neq \Phi$، $B \neq \Phi$ و $A \cap B = \Phi$ و $f(X) \subseteq B \cup A$
بما أن f مستمر فالمجموعتان $f^{-1}(A)$ و $f^{-1}(B)$ مفتوحتان في X وتحققان:
$f^{-1}(A) \neq \Phi$ و $f^{-1}(B) \neq \Phi$ و
$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \Phi$ و $X = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(A)$، أي أن هاتين المجموعتين تشكلان تقسيماً
للفضاء X مما يجعله غير مترابط. وهذا تناقض.

مدرس المقرر: ... حمص في ١٥/٢/٢٠١٧

رئيس الشعبة